
HILBERT, TURING Y LA NOCIÓN DE PROCEDIMIENTO EFECTIVO¹

FRANCISCO HERNÁNDEZ-QUIROZ
RAYMUNDO MORADO

ABSTRACT. Hilbert put forward the properties that an effective procedure should possess, without a formal characterization. Nevertheless, he formulated four desiderata: (1) a calculus is a set of instructions to be executed to solve a problem; (2) it must boil down to rules for the manipulation of formulae of a suitable formal language; (3) it must guarantee the solution of the problem in a finite number of steps; (4) it should be possible to set in advance an upper bound to the number of steps it will take to find the solution. Turing proposed his famous machines to define rigorously the meaning of effective procedure and, paradoxically, showed there is no mathematical characterization of it that satisfies Hilbert's expectations. In particular, Turing's model goes beyond desiderata third and fourth.

KEY WORDS. Effective Procedure, *Entscheidungsproblem*, Halting Problem, Turing machines.

En el curso de su proyecto para formalizar las matemáticas, Hilbert expresó las propiedades que debería tener un procedimiento efectivo, pero sin dar una caracterización formal. No obstante, formuló cuatro *desiderata*: (1) un cálculo o procedimiento es un conjunto de instrucciones a ser ejecutadas para resolver un problema; (2) debe reducirse a reglas para manipular fórmulas de un lenguaje formal adecuado; (3) debe garantizar la solución del problema pertinente por medio de un número finito de pasos; (4) debe ser posible acotar de antemano cuántos pasos llevará encontrar la solución.

Turing propuso sus máquinas para definir rigurosamente qué significa un procedimiento efectivo. Varios de los supuestos del modelo de Turing responden a los *desiderata* de Hilbert y otros no. En el presente artículo nos referiremos a varios de estos supuestos que habíamos identificado en Hernández-Quiroz y Morado (2005), donde discutimos varios presupues-

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. / fhq@fciencias.unam.mx
Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México. / morado@servidor.unam.mx

tos metodológicos en el modelo de la inteligencia mecánica de Turing, y en Morado y Hernández-Quiroz (2006), donde nos ocupamos de presupuestos representacionales. En esos artículos no exploramos las razones subyacentes a la elección de tales presupuestos por parte de Turing. En este trabajo deseamos mostrar que algunas de tales elecciones encajan con el proyecto hilbertiano de formalización de las matemáticas mientras que otras representaron un radical alejamiento de éste ².

En particular, Turing retoma la idea característica de Hilbert de la representación sintáctica, tanto de los problemas como de los métodos para encontrar sus soluciones. Sin embargo, si aceptamos la tesis de Church-Turing de que las máquinas de Turing (o formalismos equivalentes) capturan la idea de procedimiento efectivo, entonces no es posible dar una caracterización matemática de procedimiento efectivo que cumpla con otros dos *desiderata* hilbertianos: que garantice que éste dé una solución en un número finito de pasos y que el número de pasos para darla pueda ser acotado previamente. |

Hilbert formuló el *Entscheidungsproblem*, a saber, el problema de decidir si una fórmula dada de primer orden es válida. En términos formales, supongamos que Θ es un conjunto finito de enunciados $\{\theta_1 \dots \theta_n\}$ que axiomatiza una teoría matemática (por ejemplo, la aritmética elemental), y que α es un candidato a teorema de Θ , es decir, se quiere verificar si $\Theta \models \alpha$. ³ Si se acepta el teorema de la deducción, lo anterior equivale a decir que $\models (\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n) \supset \alpha$ y por lo tanto el problema de la consecuencia lógica entre enunciados matemáticos se reduce al problema de la validez lógica de fórmulas del cálculo de predicados. El *Entscheidungsproblem* consiste en el problema de verificar si $\models \Phi$ para cualquier enunciado Φ de primer orden. Hilbert lo llamó el problema central de la lógica matemática, pues consideraba que si se contara con un método para resolver este problema se tendría un método para determinar los teoremas de toda teoría matemática formulable en primer orden ⁴. Esto se deriva de concebir a toda proposición matemática verdadera como derivable en el cálculo de predicados de primer orden. Esta concepción ha sido llamada “logicismo” en matemáticas y recibió un gran impulso a partir de la publicación de *Principia Mathematica* en 1910-1913.

Hilbert, además, consideraba que las demostraciones matemáticas se reducen a la manipulación de fórmulas del cálculos de predicados por medio de un conjunto finito de reglas. A esto se le conoce como “formalismo”. Los obstáculos principales eran la traducción del lenguaje matemático al lenguaje del cálculo de predicados, y la demostración de que los métodos de la lógica eran correctos (no podían llevar a contradicciones) y suficientes para la reducción de las verdades matemáticas a teoremas lógicos. Al proyecto de salvar estos obstáculos se le conoce como el “Programa de Hilbert”.

Hilbert no estaba solo. Muchos otros tomaron con entusiasmo la propuesta de Hilbert y dedicaron un enorme esfuerzo a resolver la cuestión: Ackermann, Bernays, Schönfinkel, Herbrand, para mencionar algunos. Pero como es bien sabido, los célebres teoremas de Gödel fueron un serio golpe a este proyecto, pues fueron leídos como una demostración de que no era posible tener un sistema de tipo *Principia Mathematica* que fuese al mismo tiempo consistente y completo con respecto a la aritmética elemental.

No obstante, los teoremas de Gödel no implican que el problema de la decisión sea insoluble, sino que la lógica no puede resolverlo con un sistema como el de *Principia Mathematica*. Esto dejó la puerta abierta a su solución mediante algún sistema alternativo que tuviera al menos algunas de las propiedades que Hilbert exigía.

Pero, ¿en qué consistiría una solución al *Entscheidungsproblem*? Hilbert buscaba un *procedimiento efectivo* que permitiera decidir la cuestión de la validez de una fórmula Φ . De este modo, continuaba una tradición que se remonta al *Calculus Raciocinator* de Leibniz o incluso al *Ars Magna* de Lull ⁵. Pero la búsqueda de un procedimiento efectivo plantea el problema de definir rigurosamente esta noción intuitiva.

La idea que Hilbert tenía de un procedimiento efectivo incluía tres propiedades cruciales: 1) un cálculo o procedimiento se refería a un conjunto de instrucciones a ser ejecutadas para resolver un problema; 2) debía reducirse a reglas para manipular fórmulas de un lenguaje formal adecuado:

Los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de una teoría matemática constituyen propiamente el objeto de una demostración concreta. Para este fin, debemos remplazar las argumentaciones concretas normales en una teoría matemática por fórmulas y reglas, representarlas por medio de formalismos. Es decir, es necesario llevar a cabo una formalización estricta de la totalidad de la teoría matemática que incluye a sus demostraciones, de tal manera que tanto las inferencias como la construcción de conceptos en ella sean integrados, siguiendo el modelo del cálculo lógico matemático, como elementos formales al edificio matemático (Hilbert 1922: 47-48).

Y 3) debía garantizar la solución del problema pertinente por medio de un número finito de pasos. En el caso del problema de la decisión, Hilbert pensaba en un procedimiento que permitiría decidir sobre la validez de una fórmula *después de un número finito de operaciones* ⁶.

Por otra parte, el requisito 3) puede ser reforzado con la exigencia 4), de que seamos capaces de acotar de antemano cuántos pasos llevará encontrar la solución. Hablando sobre un problema concreto sobre invariantes algebraicos, Hilbert hace una reflexión a ser aplicada de manera general:

Más bien se hace necesario introducir ideas completamente distintas, además de nuevos principios, para poner de manifiesto que la especificación de la totalidad del sistema de invariantes requiere simplemente un número finito de operaciones, y que este número se encuentra por debajo de un cierto límite señalado antes de la realización de esas operaciones (Hilbert 1918: 32).

La definición que ofrece Turing de procedimiento efectivo está basada en “máquinas” abstractas con los siguientes elementos: a) una “cinta” infinita en la que se puede leer y escribir en celdas discretas; b) un alfabeto finito de símbolos con un subconjunto de los cuales se escribirá en la cinta finitamente la especificación del problema a resolver; c) una “cabeza” de lectura y escritura que representa la capacidad de la máquina de tomar nota de lo que hay en una celda dada de la cinta y modificarla —la cabeza lectora puede moverse a la derecha o a la izquierda, una celda a la vez; d) un conjunto finito de estados de la máquina para poder representar cambios internos en el control; e) un conjunto finito de instrucciones que especifican para cada par (estado de la máquina, símbolo en la celda leída actualmente) qué símbolo escribir en la celda actual (puede ser el mismo), en qué dirección moverse (o no), y a qué estado interno transitar. Entre los estados existe un subconjunto de estados llamados “finales”. Diremos que la máquina se “detiene” (es decir, ya terminó de calcular) cuando llega a una situación para la que no tiene instrucciones, o bien alcanza uno de los estados finales. Con este sencillo modelo Turing fue capaz de reconstruir una noción de procedimiento efectivo.

En Hernández-Quiroz y Morado (2005) identificamos, entre otros, cuatro presupuestos sobre método en el modelo de Turing que corresponden a los tres primeros *desiderata* de Hilbert, y dos presupuestos que rebasan la propuesta hilbertiana con respecto al *desideratum* cuarto. En el artículo complementario Morado y Hernández-Quiroz (2006) identificamos varios supuestos sobre representación, de los cuales tres están relacionados con el segundo *desideratum* y tres con el tercero.

En primer lugar, identificamos el presupuesto de que la inteligencia debe ser metódica. Hilbert propone que un procedimiento efectivo debe estar formado por un conjunto de instrucciones, lo cual es una de las posibles (aunque no la única) acepción de “método”. Sin instrucciones a seguir, no hay procedimiento efectivo, es decir, no es metódico en el sentido que le interesaba a Hilbert.

We assume that intelligence is an ability to solve a problem methodically. In Turing’s model, that is equivalent to the ability to apply an algorithm, to follow a fixed recipe, to implement an effective method, with a set of explicit and fixed rules that detail what to do, how, and when (Hernández-Quiroz y Morado, 2005: 355).

En ese artículo explicamos que lo que se presupone no es tanto el uso actual de un método (pues hay “iluminaciones” y descubrimientos productos de la fortuna), como la posibilidad de reconstruir la solución de un problema como la aplicación de un método. Hilbert diría “como seguir instrucciones”.

Otro presupuesto que casa bien con el primer *desideratum* de Hilbert es ver la solución de un problema como el seguir una regla. De hecho, una máquina de Turing ha sido vista en abstracto como el conjunto de instrucciones que pedía Hilbert. La caracterización de Turing de en qué consiste seguir reglas es tan clara y convincente que hizo que su artículo perdurara en la tradición matemática como la definición de procedimiento efectivo por encima de la de Church, que fue unos meses anterior.

El segundo *desideratum* de Hilbert tiene un eco en un presupuesto del modelo de Turing, consistente en ver la resolución de un problema como transformaciones sintácticas. Hilbert apreciaba las ventajas de las soluciones en las que no se requiere que participe la intuición, remplazando hechos y operaciones por “fórmulas y reglas”:

The great advances in mathematics since antiquity, for instance in algebra, have been dependent to a large extent upon success in finding a usable and efficient symbolism. [...] The logical relations which hold with regard to judgments, concepts, etc., are represented by formulas whose interpretation is free from the ambiguities so common in ordinary language (Hilbert and Ackermann 1928: 1).

Tal concepción de la resolución de un problema como transformaciones sintácticas presupone, a su vez, lo que hemos llamado “representabilidad de los problemas”. Esto no exige que todo problema tenga naturaleza lingüística, sino sólo que pueda representarse lingüísticamente. En consecuencia, Turing puede recurrir a un sistema hilbertiano de fórmulas para representar tanto el problema como su solución. Aunque en Morado y Hernández-Quiroz (2006) discutimos qué tan controvertible es el presupuesto de la representabilidad, creemos que es un legado natural de la tradición hilbertiana en que Turing estaba trabajando y que tiene hondas raíces históricas.

Otro presupuesto afín es concebir la resolución de un problema como un procesamiento de información. Cuando Hilbert, como vimos, habla de las fórmulas como uno de los objetos propios de la demostración, en vez de hablar de aquello que las fórmulas representan, manifiesta el presupuesto de que manipular la información a través de sus representaciones puede ser considerado, al menos en matemáticas, como equivalente a resolver el problema mismo. Este desplazamiento del objeto del problema facilitará a Turing ofrecer un modelo de procesamiento de información como un modelo de resolución efectiva de problemas.

Otro presupuesto del modelo de Turing sobre la secuencialidad de la representación de un problema fue reducido (en nuestro segundo trabajo mencionado) a un presupuesto de finitud que corresponde al tercer *desideratum* de Hilbert.

El tercer *desideratum* es retomado directamente por Turing. La matriz de la función de transición que define a una máquina de Turing es finita, lo que refleja que el método debe contener un número finito de reglas. Cada componente de la matriz es una regla de comportamiento para la máquina de Turing y dado que la matriz es finita, el número de reglas también lo es.

Hilbert acepta el cálculo de primer orden con infinitos predicados, variables, y símbolos funcionales, mientras que Turing presupone un vocabulario finito. Esta limitación extra conlleva que la matriz sea finita también; puede salvarse tal limitación si se da por hecho que el vocabulario infinito de Hilbert puede ser especificado finitamente, como Hilbert creía.

Parecería que no hay contradicción entre los dos porque los símbolos de Turing pueden ser vistos como componentes de expresiones hilbertianas. Así, dos símbolos en sistema binario bastan para representar el conjunto infinito de los numerales que representan a los naturales. Sin embargo, el vocabulario de Turing es intrínsecamente finito, puesto que la reacción de la máquina se produce exclusivamente en función del símbolo leído y el estado actual, ambos pertenecientes a conjuntos finitos y no en función de que este símbolo sea componente de una expresión más compleja perteneciente a un conjunto infinito de símbolos. El que nuestros numerales arábigos partan de diez símbolos básicos no los hace un conjunto finito de símbolos. En este sentido, Turing es más finitista que Hilbert, pues no sólo demanda una especificación finita sino una cardinalidad finita del conjunto de símbolos básicos⁷. Turing también presupone que la entrada para una máquina de Turing es finita, lo que hemos llamado en Morado y Hernández-Quiroz (2006) "finitud del estímulo". A estos dos elementos Turing agrega que los símbolos deben ser discretos, eliminando una infinitud potencial. No solamente los símbolos inspeccionados sino también los estados de la máquina y las acciones de la máquina son discretos. No puede leerse o escribirse sólo un fragmento de símbolo o mover sólo parcialmente la cabeza lectora.

Hay un presupuesto que entra en conflicto con el cuarto *desideratum*: El considerar que la complejidad espacial puede ser ignorada en la definición de procedimiento efectivo. Pero esto tiene la consecuencia de que una cota en la complejidad computacional no es un requisito para que un método sea un procedimiento efectivo. En este punto, la intuición finitista de Turing se separa de la de Hilbert. Para Turing se sigue estando en el terreno del finitismo si un método nos permite resolver el problema en un número finito de pasos, aunque no podamos decir de antemano cuántos. Una

implicación es que los recursos que necesita una Máquina de Turing para hacer los cálculos previos a la solución deben ser potencialmente infinitos, so pena de arriesgarnos a quedarnos sin espacio en la cinta para nuestros cálculos antes de concluir. De esto no se desprende que sea aceptable tomar un número infinito de pasos para resolver un problema. Debe haber finitud, aunque no esté acotada. La infinitud de la cinta es tan solo una precaución para evitar restringir arbitrariamente la complejidad espacial de la operación de las máquinas.

Por los desarrollos posteriores de la teoría de la computación, el finitismo no acotado de Turing resulta preferible al más demandante de Hilbert. La famosa demostración de Turing, de que el problema de la detención es insoluble, abrió el paso al teorema de Rice (1953), una de cuyas consecuencias es que no existe un método general para acotar el número de pasos necesarios para resolver los problemas. El cuarto *desideratum* de Hilbert, por lo tanto, es inalcanzable.

Al definir Turing los procedimientos efectivos en términos de lo que pueda ser ejemplificado por alguna máquina de Turing, quedan incluidos procedimientos que no terminan, es decir, "que toman un número infinito de pasos". Tales procedimientos contravienen el tercer *desideratum*, de que un procedimiento efectivo debe tomar sólo un número finito de pasos. Pero Turing (1936) no tiene alternativa porque su resultado central es que no puede existir un método efectivo general para distinguir de antemano si un procedimiento terminará.

En este caso, por supuesto, no se trata de que Turing haya decidido diferir de Hilbert, sino que no tiene otro camino. La única alternativa sería restringir la definición de procedimiento efectivo de tal manera que algunos procedimientos intuitivamente efectivos quedaran excluidos. Por ejemplo, si intentáramos definir procedimiento efectivo en términos de funciones primitivo recursivas, tendríamos un conjunto decidible de funciones, cuya evaluación toma un número finito de pasos. Sin embargo, como es bien sabido, hay funciones que obviamente terminan (e incluso cuya complejidad está acotada, como la de Ackermann), que no son definibles como primitivo recursivas. La insolubilidad del problema de la detención implica que no existe ningún método que nos permita decidir entre los procedimientos que terminan y los que no lo hacen.

El punto no es que no se pueda dar una caracterización de procedimiento efectivo abstracta del estilo "un procedimiento efectivo es aquel definible en términos de una máquina de Turing que siempre termina". El problema con tal definición es que estaríamos caracterizando los procedimientos efectivos de una manera no susceptible a ser especificada de manera efectiva, pues el conjunto de tales máquinas no es decidible.

En resumen, restringir la noción de manera decidible (e.g., funciones primitivo recursivas), dejaría fuera procedimientos intuitivamente efecti-

vos. Ampliarla para incluir cualquier procedimiento capturado por una máquina de Turing abre la puerta a procedimientos que no son efectivos en el sentido de Hilbert (e.g., máquinas de Turing que no terminan). Hacer una caracterización abstracta (e.g., máquinas de Turing que siempre terminan) es inútil si tal caracterización no nos permite decidir en general cuándo estamos ante un procedimiento efectivo.

Es claro, por la descripción del modelo de Turing, que si las máquinas representan su noción de procedimiento efectivo, ésta satisface los dos primeros *desiderata* de Hilbert. En primer lugar, tenemos un conjunto (finito) de instrucciones a ser ejecutadas para resolver cualquier problema al que se enfrente la máquina de Turing (pueda resolverlo o no); de hecho, el conjunto de instrucciones está especificado de antemano y no puede variar. En segundo lugar, estas instrucciones son reglas para manipular caracteres que no dependen del significado atribuido a éstos.

Armado de este modelo, Turing fue capaz de plantear un problema que sus máquinas no pueden resolver. Una vez que una máquina inicia la ejecución de sus instrucciones existen dos posibilidades: (a) la máquina se detiene eventualmente cuando no hay una instrucción por seguir (con la solución al problema escrita en la cinta); (b) la máquina no se detiene nunca (y de este modo jamás alcanzamos una solución). Por supuesto, si queremos saber si una máquina de Turing dada resuelve un problema especificado en su entrada, debemos saber si se detendrá durante la ejecución de sus instrucciones. Si no se detiene, la máquina no representa un procedimiento efectivo, en el sentido de Hilbert, para resolver ese problema, pues el tercer *desideratum* de Hilbert es que el número de operaciones efectuadas para alcanzar una solución sea finito. Por esta razón, es importante plantearse lo que Turing llamó el problema de la detención (*halting problem*): "Dada una máquina M y una entrada E , ¿ M se detendrá con E ?". Si pudiéramos determinar los pares (M, E) tales que M se detiene con E , tendríamos una forma de saber cuándo una máquina de Turing representa un procedimiento efectivo en el sentido de Hilbert.

Desgraciadamente, como el mismo Turing demuestra en su artículo, no existe un método general para resolver el problema de la detención. Esto significa que no podemos dar un método efectivo para separar los procedimientos efectivos en el sentido de Hilbert, de los que sólo son efectivos en el sentido de Turing. Como corolario, no hay un procedimiento efectivo en el sentido de Hilbert para el problema de la decisión.

Al tratar de definir la noción de procedimiento efectivo tras el planteamiento de Hilbert, Turing dio una caracterización que prescinde de dos de sus propiedades esenciales: finitud en el número de pasos y acotamiento de éste a partir de la especificación del problema. La idea de procedimiento finitario en Turing incluye el uso de operaciones finitas, pero no la finitud ni el acotamiento del número de ellas. El finitismo de Turing radica

en la finitud de los elementos de la demostración y no en la finitud del proceso o de su cota de pasos. La insolubilidad del problema de la detención implica que no podemos tener un mecanismo general para saber de antemano si tomará o no un número finito de pasos resolver un problema dado.

Hilbert expresó las propiedades que debía tener un procedimiento efectivo sin dar una caracterización formal. Turing propuso sus máquinas para definir rigurosamente qué significa un procedimiento efectivo y paradójicamente demostró que no existe una caracterización matemática del mismo que cumpla con las expectativas de Hilbert.

NOTAS

- 1 Este trabajo completa nuestra ponencia Hernández-Quiroz y Morado (2006).
- 2 Ya otros han hablado sobre estos temas pero su análisis se ha concentrado más en los aspectos matemáticos que en los filosóficos de esta relación, entre las ideas de ese momento y los aspectos de los modelos de la inteligencia mecánica en los veinte y treinta (Gandy 1995 y Davis 1995).
- 3 Usamos la relación " \models " de consecuencia lógica porque no se trata de demostrar la derivabilidad lógica de α a partir de Θ por medio de un sistema formal, sino de ver si se sigue en el sentido más lato de teoremas en la literatura matemática. El programa de Hilbert en el fondo intentaba mostrar la correspondencia entre ambas nociones.
- 4 Hilbert y Ackermann, 1928. Turing, 1936-7 se refiere explícitamente a "the Hilbertian Entscheidungsproblem".
- 5 Como se argumenta en Börger, Grädel y Gurevich 2001, la solución que Hilbert busca al problema de la decisión puede ser vista como una versión del cálculo leibniziano restringido a cuestiones matemáticas (o al menos a aquellas formulables en cálculo de predicados de primer orden).
- 6 Hilbert habla de "el problema de la decidibilidad de un problema matemático por medio de un número finito de operaciones" (Hilbert 1918: p. 32).
- 7 Podría pensarse que también podríamos manejar matrices de transición infinitas en el contexto de las máquinas de Turing, siempre y cuando tales matrices fueran finitamente especificables. Sin embargo, esta posibilidad no es un *desideratum* explícitamente acatado sino un corolario a la existencia, poco obvia, de una máquina de Turing universal. El objetivo en Turing ya no es manejar la infinitud hilbertiana de símbolos, sino la capacidad finita de reconocimiento de símbolos.

REFERENCIAS

- Börger, E., E. Grädel, Y. Gurevich (2001), *The Classical Decision Problem*, Berlín, Springer, Universitext.
- Church, A. (1936), "An unsolvable problem of elementary number theory," *The American Journal of Mathematics* 58: 345–363.
- Davis, M. (1994), "Mathematical logic and the origin of modern computing", Herken, R. (ed.) *The Universal Turing Machine—A Half-Century Survey*, Viena, Springer, pp. 135–158.
- Gandy, R. (1994), "The confluence of ideas in 1936," Herken, R. (ed.), *The Universal Turing Machine—A Half-Century Survey*, Viena, Springer, pp. 51-102.
- Hernández-Quiroz, F., R. Morado (2005), "Some assumptions about problem solving method in Turing's model of intelligence", Hamza, M. H. (ed.), *Computational Intelligence (CI 2005)*, Calgary, Acta Press, pp. 354-358.
- Hernández-Quiroz, F., R. Morado (2006), "Presupuestos del modelo clásico de la inteligencia mecánica", *Actas del XIII Congreso de Filosofía de la Asociación Filosófica de México*.
- Hilbert, D., W. Ackermann (1928), *Grundzüge der Theoretischen Logik*. Traducción inglesa como *Principles of Mathematical Logic*, Nueva York, Chelsea Publishing Company, 1950.
- Hilbert, D. (1918), "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, 78: 405-415. Traducido como "El pensamiento axiomático", Hilbert, D., *Fundamentos de las Matemáticas*, 1993, pp. 23-35, México, UNAM, Mathema. Citamos de esta última edición.
- Hilbert, D. (1922), "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1: 157-77. Traducido como "Nueva fundamentación de las matemáticas", Hilbert, D., *Fundamentos de las Matemáticas*, 1993, 37-62, México, UNAM, Mathema. Citamos de esta última edición.
- Hilbert, D., P. Bernays (1934), *Grundlagen der Mathematik*, Berlin, Springer.
- Morado, R., F. Hernández-Quiroz (2006), "Some assumptions about problem solving representation in Turing's model of intelligence". Aceptado para publicación en *TripleC: Cognition, Computation, Co-operation*.
- Rice, H. G. (1953), "Classes of recursively enumerable sets and their decision problems," *Transactions of the American Mathematical Society* 74: 358-366.
- Turing, A. M. (1936–7), "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society* 42: 230–265.